《两角和与差的余弦》教学设计与评注[1]

丁益民　（江苏省苏州实验中学 215011）

1 问题情境中应体现明确的教学定位

问题 1：前面我们学习了三角函数的定义，并知道一些特殊角的三角函数值，如$\cos 60^0, \sin 45^0, \cos 30^0$等，试问你会求$\cos 15^0$的值吗？（不用计算器）

预设方案：学生能想到将之变形为$\cos 15^0 = \cos(45^0 - 30^0)$或$\cos 15^0 = \cos(60^0 - 45^0)$，进一步猜想出“$\cos(60^0 - 45^0) = \cos 60^0 - \cos 45^0$”；

否定猜想：左边$\cos 15^0 > 0$，右边=$\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} < 0$，左边≠右边；

聚焦问题：能不能找到解决此类问题的运算公式，即$\cos(\alpha - \beta) = ?$

【评注】将三角变换定位成求值运算，无论从数学发展的角度还是从知识应用的角度来看，都是合乎情理的，这样设计的教学起点很明显——从知识冲突中寻找研究的必要性，而且由此实施和达成的教学目标也直接具体，可测试性强.

2 数学活动的推进可在多元的逻辑框架下进行

活动 1：回顾历史，探索结论

“数学是从人的需要产生的.”（恩格斯语）事实上，为了改善天文、航海等计算的目的，三角学才应运而生.早期，由于几何学的发展与地位，数学家们最先从几何图形的角度来研究的.值得一提的有两位数学家：

托勒密

（古希腊数学家，地理学家，天文学家）

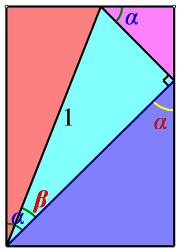
帕普斯

（古希腊数学家）

他们都是用几何方法来研究三角运算的（如托勒密与弦图，帕普斯通过构造

[1] 本文系苏州市教育科学“十二五”规划研究课题《高中数学思维导向的实践与研究》（课题批准号：130403388）阶段研究成果.

几何图形证明三角公式），那么，接下来我们沿着数学家的足迹研究上述问题.



无字的证明

（Proof without words）

借用“妙图”，探索结论（呈现图片）：

问题 2：投影出该图片（如下图），你有什么发现呢？

引导学生分析出结论：$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.

【评注】基于几何方法研究三角运算的历史观，让学生在感受数学史文化熏染的同时，体悟到数学研究的思想方法，这对学生认知观的提升大有必要——我国的数学教育不缺少基本功，缺少的恰是数学思想的传承与创新. 因此，这一活动能让学生从观念上形成冲击，并自然对接“无字证明”的思维引领，形成了新知识生成的又一认知起点——从数学史料中产生. 当然，这一环节还体现了数学的思维与文化是一体的，思维是文化的微观体现，文化是思维的宏观表征.

活动 2：转变视角，演绎结论

上述结论由于几何图形的限制，角α,β都是锐角，且$\alpha>\beta$，那么这一结论是否对任意的α,β也成立呢？因此，有必要寻找一个新的视角解决此问题.

问题 3：之前，我们研究三角函数的同角三角函数关系、诱导公式都运用了“单位圆”这一工具，那么你能以单位圆为工具证明结论：

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$吗？

引导：从公式的结构特征看，你联想到什么运算呢？如何构造？

——（右边的运算像最近学习的什么运算？是哪两个向量？

——（左边是不是也是数量积运算？是哪两个向量？）

请在单位圆中作出这两个向量并证明这一结论.

【评注】从三角函数定义到同角三角函数关系及诱导公式，单位圆成了研究“公式”过程中的通用工具，因此，“单位圆”也成了公式研究的另一个研究起点. 活动中用熟悉而一致的思维载体来研究新公式，切合学生认知规律，保持思维的一致性对形成适宜的数学思想方法很有必要. 另外，从研究对象的结构特征引导学生“构造”出向量数量积运算，这是一种有意义的思维训练过程，也使“向量法”的出现不突兀.

活动3：反思完善，形成定论

认知方向1：从特殊到一般

问题4：上述公式的证明$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$都是锐角（无字证明图）或$[0,\pi]$（向量的夹角），而且$\boldsymbol{\alpha}>\boldsymbol{\beta}$，那么$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$能否推广到任意两个角$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$呢？

——处理方式1：由于$y=\cos x$是周期为2π的偶函数，只需研究$0\le\alpha-\beta\le\pi$即可（可借助几何画板加以验证$\cos<\vec{a},\vec{b}>=\cos(\alpha-\beta)$）.

——处理方式2：通过诱导公式可知锐角或$[0,\pi]$内的角的三角函数值可拓展为$[0,2\pi]$内的角的三角函数值，进一步地推广为任意角的三角函数值.

因此，结论对任意的角$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$都成立.

认知方向2：从一般到特殊

由α，β的任意性可知：

（1）若公式中$\alpha=\pi$，$\alpha=\dfrac{\pi}{2}$，得到什么？

——$\cos(\pi-\beta)=-\cos\beta$，$\cos(\dfrac{\pi}{2}-\beta)=\sin\beta$（诱导公式）

（2）若公式中$\alpha=\beta$，得到什么？

——$1=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$（平方关系）

（3）若公式中β用$-\beta$代换，得到什么？

——$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

【评注】这一活动具有较高的思维训练价值：对结论进行双向认知可让学生在公式的“对象”与“过程”的二重身份中多角度理解公式.具体看，从特殊到一般，不仅弥补了公式在几何法证明中的“缺陷”（将锐角或$[0,\pi]$内的角的三角函数值拓展到任意角的三角函数值），而且揭示了公式研究的基本规律（从特殊到一般）；由于角的任意性将公式中的角进行赋值或代换得到一系列结论（其中“代换”的价值不仅是发现$C_{(\alpha+\beta)}$，还为后续的公式提供生长点），从效果看，不仅可贯通知识间（已学知识与新学知识）的关联，有助于学生实现知识的多元

表征，其中的思维成果“回流”更有助于学生正确使用公式，帮助学生形成正确的思维通道.

3 公式的记忆须在理解的前提下进行

两角差的余弦公式：

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \qquad (C_{(\alpha-\beta)})$$

两角和的余弦公式：

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \qquad (C_{(\alpha+\beta)})$$

引导学生分析公式左右特征，提取规律：余余正正，符号变身.

【评注】从公式的“外形特征”寻求公式记忆的规律，显著效果是迅速记住公式并在公式运用时能正确到位，但要注意记忆规律的发现不仅仅是外在形式的体现，还要告诉学生“规律”背后的数学依据，做到在理解的基础上进行形象化的记忆.

4 数学应用要立足于巩固对公式的认知

例 1 （回归问题）求$\cos 15^0,\cos 75^0$.（公式的正用）

例 2 利用两角和（差）的余弦公式，化简：（公式的逆用）

（1） $\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{3\pi}{10}-\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{3\pi}{10}$

（2） $\cos(24^0+x)\cos(21^0-x)-\sin(24^0+x)\sin(21^0-x)$

【评注】公式生成后，为了更好地掌握公式内涵，往往首先从正向、逆向两个角度对公式进行运用，目的就是要加深公式的理解. 公式新授课的例题设计的坡度要“缓”“慢”“小”，等到公式完全掌握后再进行变式与提高，切不可在公式运用的初始阶段出现“高大伤”（高难度、大思维量、伤透脑筋）的例题，否则将降低公式理解的认可度，影响教学效果.