本文发表在核心期刊《中学数学教学参考》2015 年第 10 期

备课应重视教学设计的研究质量

——以“等差数列前 n 项和(第 1 课时）”为例

丁益民

（江苏省苏州实验中学　215011）

我们先从两个教学事件谈起：

事件 1：前不久，笔者参加区教研活动听了一节课，课题是“等差数列前 n 项和（第 1 课时）”，选用的情境是“堆钢管”问题，从情境出现到公式推导出来花了 12 分钟.

事件 2：为迎接教育部“一师一优课，一课一名师”的活动，我校一青年骨干教师录制了一节课，恰好也是“等差数列前 n 项和（第 1 课时）”，授课教师在课开始的情境中放置了近 5 分钟的“高斯巧算”故事视频.

两个事件都出现了对课堂时间把控不当的现象，究其原因，实则是对教学内容和素材的研究不够，尤其是教学设计时没能对各个环节进行分析和思考. 在备课之初，我们应思考一个首要问题：一节课的教学价值到底是什么？从学生长远发展的角度来看，应有意识地将知识教学与价值观影响自然地融为一体，因此，须从教学内容的定位研究起，诸如一节课在观念意识上给予了学生怎样的教育？教学内容中含有多少有效的思维训练？教学起点的选择对学生认知有怎样的帮助？等等.这些都应该成为教师在备课中着重思考的问题.本文拟以“等差数列前 n 项和（第 1 课时）”为例，谈谈备课中的一些思考.

1 多角度分析教学内容，确定教学目标的主线

1.1 教学内容的整体分析

数列是以“数”为研究对象的特殊函数，在“数列”整个教学体系中，应始终以函数的视角来审视数列的属性，比如数列中的项是如何变化的？数列的项与项之间有怎样的关系？等等.因此，本节教学内容可以视为在学完“等差数列的通项公式”后，进一步认识“等差数列”函数特性的又一重要角度，函数视角是数列教学的一条认知主线.

其次，数列研究的对象是数，必然与“运算”相关，因此，教学内容的另一条线就是数列中的运算，寻求和建构合适的运算规则来研究数列中的运算当成为

主要教学内容之一.比如，通过“累加”的运算方式得到等差数列的通项公式，不仅如此，这样的运算规则还适用于形如递推关系“$a_n - a_{n-1} = f(n)$”的通项公式求解问题.所以，一开始就应让学生建立起“数列”章节的学习将以探索运算规则作为学习目标的基本认识.

1.2 运算架构下的算理分析

自然地，本节课研究主体是数的“求和”运算，应立足于让学生充分认识到研究运算问题，必须不断地去寻求合适的运算规则加以转化，于是，寻找合适的算法是研究等差数列前 n 项和的基本出发点——不同项（数）的求和问题应如何快速运算？学习经验告诉他们要通过“化归与转化”的思想得以实现，可设计简单问题让他们感受这一点：

问题 1：“1+1+…+1=?（100 个 1）”（学生能轻松作答，为何？）

问题 2：“1+2+3+…+100=？”（为何只有高斯“迅速”作答？因为他发现了“1+100=2+99=…=50+51=101”.）

由此可见，将不同数的求和问题转化为相同数的求和问题是本节课的先行组织者.本节课是以“算法—算理”为教学起点的教学过程.

2 合理规划每个教学环节，做好教学素材的研究

2.1 情境的选择应立足学生认知实情与发展

教学过程首要设计的就是“创设情境”，就本节课而言，流行在期刊和网络资源中的情境有两种：一种是耳熟能详的“高斯巧算 1+2+…+99+100”的数学故事，另一种是“堆钢管”（或“V 型铅笔堆”）的实际问题，对这两种情境的功能持有各自观点：

选用“高斯故事”的观点：以熟悉的数学史知识作为新知的认知情境，不仅能调动学生的学习积极性，而且还可由高斯的首尾相加法算法引发倒序相加法的产生，利于教学活动的开展.

选用“堆钢管”的观点：从实际运用作为新知的认知情境，不仅加强了数学应用意识的渗透，还可从“形”的角度启发倒序相加法的产生，同样利于教学活动的开展.

这两个情境哪个更好？高斯的首尾相加法算法真的是倒序相加法的逻辑基础吗？实际教学中，真的是由高斯相加法想到倒序相加法的吗？而选择“堆钢管”

情境可能引发问题：怎么想到在旁边倒置一个全等的“钢管堆”？——这样看来，两个“经典”情境的创设可能引发一系列问题，从上文的内容分析可知，这一问题关键其实不是情境自身，而是对教学内容的理解与教学素材的选择分析不透，导致了学生认知衔接产生了断层现象.

对情境创设的功能在此不再赘述，毋庸置疑的是情境创设应服务于学生的知识生成，只有充分了解学生现有认知基础和能力水平，才可创设出适合的情境.所以，情境之惑不是设计中的出发点和争议点，而应是在研究学情的基础上，结合本节课的教学内容，寻找适合学生认知建构的知识生长点.从这个角度讲，无论选择“高斯巧算”的史料情境，还是选择“堆钢管”的现实情境，都有其合理的因素，都能支持将“不同数的求和”化为“相同数的求和”的算理，也都能设计出相应的问题链来引导学生进行思维.

2.2 活动组织的设计要重视表征能力的训练

在课堂上，对“倒序相加法”的出现经常遇到如下尴尬境况：教师设计了精彩的情境，也伴有问题铺垫，但却始终启而不发，最终以教师告之而终.如此教与学的思维“断档”是普遍存在的现象，究其原因是教师在“情境”与“问题”的设计并未落在学生认知中的“最近发展区”，选取的先行组织者对知识的生成不能起到“组织”之效.

有了教学内容的分析，明确了本节课的教学定位是建立在将“不同”化为“相同”的算理之上，接下来才是选择什么样的经验素材辅以导向，而这是由知识的不同表征方式所决定，从而出现了不同的情境，进而产生了不同的活动组织方式.就“倒序相加法”的组织方式可以有：

组织方式 1　代数的“对称”表征

高斯的发现：1+100=2+99=⋯=50+51.

问题链：①如何用函数的观点审视这样的等式？

（函数语言表征：$f(1)+f(100)=f(2)+f(99)=\cdots=f(50)+f(51)=101$.）

②这是函数的什么性质？（对称性.）

③用数列语言如何表达？

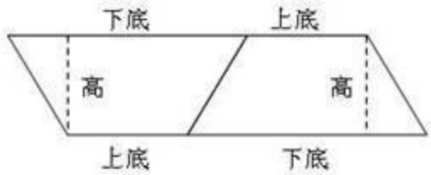
（数列语言表征：$a_1+a_{100}=a_2+a_{99}=\cdots=a_n+a_{101-n}=101$.）

④这是数列的什么性质？（$m+n=p+q(m,n,p,q\in N^*)\Rightarrow a_m+a_n=a_p+a_q$.）

通过问题链的引导，学生能体会到数列中的“对称性”成了支持化不同为相同的理论依据，接下去的活动应该是如何借助“对称性”实现“$a_1+a_{100}=a_2+a_{99}=\cdots$”的操作，首先应让学生认识到是为了避免奇偶性的讨论，由区别于高斯的首尾相加法的另一操作方式，在不长的思考和讨论中，是有可能实现“倒序相加法”的自主建构.

组织方式 2　几何图形的“对称”表征

小学里梯形的面积公式的推导如图示：



问题链：

①为什么要“倒置”一个全等的梯形？（补成平行四边形.）

②梯形公式的推导体现了怎样的研究策略？

(将不规则或不熟悉的图形转化为规则或熟悉的图形的研究策略.)

③能否借助这样的策略研究“堆钢管”问题？

④能否进一步借此研究等差数列的求和问题？

脱去“堆钢管”的外在包装，学生能表征出情境的本质就是梯形面积公式推导的问题.这样的组织者是将认知起点降格到已有的认知经验中去，使得情境中“倒置”产生不突兀了.不仅如此，用形象直观的几何图形来表征对称性，操作方式与思想恰好与本节课教学中运算规则（倒序相加法）的思想保持一致，形成形与数的互通与对接.

3.教学活动的设计需进行适宜的预估分析

在教学设计时，往往更多地关注活动过程的设计，而忽略对活动的预估设计，预估是对活动环节的预案与备注，通过预估的设计可更有效地组织活动.在预估设计中应尽可能地站在学生角度进行思考、分析，以学生的实际学情为预估的基础，切合学生认知规律的预估才具有操作性.

以本节课来看，“算理”的方向引领与“对称性”的经验组织是活动开展的逻辑基础和目标追求.结合两个“经典”的情境，可设计如下的教学活动流程：

活动方式 1　“高斯故事”情境下的教学组织流程

S1：数列求和的必要性以及求和运算的简便准则综述；

（预估：传递给学生学习本节内容的两个目标：进一步认识数列的函数属性，并研究等差数列求和的运算规则，可借助具体的例子说明此目的.）

S2：1+1+…+1=？（100 个 1）

1+1+2+3+…+100=？（首尾相加法）

1+2+3…+n=?（奇偶讨论）

（预估：以“特殊到一般”的方式组织高斯故事的内容，将能引发学生的交流与讨论，并点出首尾相加法的本原与不足之处.）

S3：为了避免讨论奇偶性，还可以通过怎样的方式出现：

1+100=2+99=…=50+51=101?

(预估：若学生难以表征，可引导：函数表征，揭示函数性质——数列表征，揭示数列性质.若学生难以“倒序”，可借助 S2 中已算出的“$\frac{n(n+1)}{2}$”的结构加以进一步引导.）

S4：进一步地用这样的方式研究一般的等差数列的求和，即$a_1+a_2+\cdots+a_n=?$

（预估：可以性质“$m+n=p+q(m,n,p,q\in N^*)\Rightarrow a_m+a_n=a_p+a_q$”为活动开展的起点，也可从通项公式为活动的起点.）

活动方式 2：“堆钢管”情境下的教学组织流程：

S1：数列求和的必要性以及求和运算的简便准则综述；

（预估：同上）

S2：回顾小学里梯形面积公式的推导过程，并借鉴来研究“堆钢管”问题？

（预估：教学中让学生能体会到“形”中是“将不规则图形化为规则图形”的转化思路，而“堆钢管”是“将不等根数化为相等根数”转化策略，二者的思想是一致的.)

S3：求钢管总数的问题实际上是什么数学问题?能否进一步地借用上述方法去研究一般性的等差数列求和，即$a_1+a_2+\cdots+a_n=?$

（预估：如何把形中的“倒置”与数列中的项“倒序”对应起来，需要引导，依据就是“对称性”，而后续操作同活动方式 1 的 S4）.

在教学实践中，根据预先的活动预估设计，可实时对教学现场（学生的反应、课堂氛围）进行调控与变换教学活动的组织方式.当然，不可能对所有可能发生的教学活动进行预估，只能是以达成教学目标为首要任务的前提下进行预估设计.

总之，在备课中要充分研究教学内容的教学价值，就需要教师不断研究与思考，不断地提高教学设计每个环节的研究质量，为学生实现有意义学习提供保证.

参考文献

1 王学一.关于“等差数列前 n 项和”教学的思考[J].中小学数学，2014,6

2 余锦银.在平凡中凸现新课标理念——“等差数列前 n 项和”的教学实录及其反思[J]. 中学数学，2007,10