编者按：为加强编辑部与中学的联系，本刊编委第七次“走进课堂”，于 2014 年 4 月 3 日赴江苏省苏州实验中学，来到苏州高新区陈平名师工作室听课交流．本次活动为高三同课异构课，主题是数列中的代数推理问题，由丁宗国和周永峰两位老师执教，其中丁老师执教自己所带的班，周老师则为借班上课．

江苏省苏州实验中学创建于 1994 年，是由国家级高新产业开发区——苏州高新区全额投资的一所现代化高级中学．办学历史不长，发展势头迅猛，现为国家级示范高中，江苏省首批四星级高中(目前省内最高级别的高中)．教师面向全国招聘，名师荟萃，中学高级教师占 68%(其中教授级高级教师 1 名，特级教师 5 名)，并有一大批荣获国家、省、市级表彰的劳动模范、优秀教师、师德标兵、优秀班主任等．学校秉承“全面发展、突出个性”的办学理念，为北京大学、清华大学等国内著名高校输送了一大批德才兼备的优秀毕业生，学校在学科奥林匹克竞赛、体育艺术特长发展、国外名校录取等方面也业绩骄人、建树颇丰．

以学定教　提高高三复习的有效性

——“数列中的证明问题”教学实录与反思

丁宗国　(江苏省苏州实验中学　215011)

作者简介：丁宗国，江苏省苏州实验中学数学教师，苏州市教坛新秀“双十佳”，高新区数学教学能手，新区优秀教育工作者，中国数学奥林匹克一级教练员．近年来多次面向市、区开设教学观摩课，有丰富的教学经验．曾获苏州市区解题比赛一等奖，评优课一等奖，苏州市评优课二等奖，辅导多名学生参加省数学竞赛获得全国一等奖及省一等奖．

1　学情分析

授课班级为高三(11)班，这是一个文科史地实验班，学生基础较好，但思维的深度、广度和严密度较薄弱．

2　教材分析

“数列中的证明问题”是二轮复习中针对学生弱点自编的一节专题复习课．在本专题之前已经复习了 4 个课时的数列问题，学生对数列的基本特性已进一步了解，等差、等比数列中的基本量的运算与判断也比较熟悉，并能求解数列中简单递推关系．本专题是研究高考数学中的热点和难点问题，通过本专题的学习进一步规范学生的数学语言，培养学生的逻辑推理能力，进而为研究数列内部综合以及数列与函数、不等式等其他知识综合的问题做准备．

3　过程实录

开场白：前面我们已经复习了数列的概念、前 n 项和、等差数列和等比数列、简单递推关系求解策略等数列问题．今天我们来谈谈数列中的证明问题(板书课题：数列中的证明问题)．首先，请同学们回忆，证明一个数列是等差(或等比)数列有哪些方法？

生 1：定义法、中项法．

师：很好，其他同学想想，还有吗？

生 2：通项法、S_n(前 n 项和)法．

师：……(停顿，没评价)

生 1：只有定义法和中项法，通项和 S_n 只能判断，不能用作严密的推理证明．

3.1　方法总结

师：正确，求证类问题要求逻辑严密、过程规范，证明一个数列是等差(或等比)数列，只有两种方法——定义法和中项法(板书：① 定义法；② 中项法)．

3.2　预习点评

师：(展示投影 1) 昨天，大家已完成学案上的“基础训练”部分，先看基础训练的第 1 题，只要由 S_n 求出通项 a_n，再用定义证明此题，同学们都“会做”．老师摘抄了一些同学的过程(部分)，同学们看看有没有问题？(展示投影 2)

1. 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=4-2^{2-n}$ $(n\in \mathbf{N}^*)$，求证：$\{a_n\}$是等比数列．
2. 已知数列$\{a_n\}$是公比不为 1 的等比数列，其前 n 项和为 S_n，且 a_5,a_3,a_4 成等差数列．求证：对任意 $k\in \mathbf{N}^*$，S_{k+2},S_k,S_{k+1} 成等差数列．
3. 设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若对于所有的正自然数 n，都有 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$，证明$\{a_n\}$是等差数列．

投影 1　基础训练题

生众：（面面相觑，停顿片刻）a_n 两边要加上大括号才表示数列.

> ……
> 所以 a_n 是等比数列.

投影 2　训练 1 过程 1

师：正确！我们每说（或写）一句话都应规范准确（板书：规范）. 再看两个过程（展示投影 3 和 4），看看表述得是否准确、规范且到位呢？

生 2：（过程 2 中）a_{n-1} 在 $n=2$ 时即有 a_1，但 a_1 还没有解决，这必须单独处理.

师：很好，即要注意下标 n 的适用范围. 看过程 3，a_1 单独处理了，还交代了非零，是不是完全正确了呢？

生 2：（停顿，分析思考中）

师：其他同学也和生 2 一起想想.

> ……
> $a_n=2^{2-n}, n\geqslant 2$，
> $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{2^{2-n}}{2^{3-n}}=\frac{1}{2}, n\geqslant 2$，
> 所以 $\{a_n\}$ 是等比数列.

投影 3　训练 1 过程 2

> $n\geqslant 2$，……
> 所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}$，
> 且 $a_1=4-2=2\neq 0$，
> 所以 $\{a_n\}$ 是等比数列.

投影 4　训练 1 过程 3

生 2：还是不对，缺少 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{2}$.

师：太好了！我们处理这类问题必须紧扣定义，看准下标 n 的适用范围（板书：范围），规范精准地写出证明过程，确保在应试中会而不失分. 同学们看看生 3 的过程写得怎么样？（非常清晰规范的过程，直接投影生 3 的学案，投影内容略）

生众：（认真看后，议论）好！

师：我们以后要向生 3 学习. 下面看训练 2，这也是个比较简单的问题，绝大多数同学都通过先求出数列 $\{a_n\}$ 的公比 q，再代入前 n 项和公式，立得 $S_{k+2}+S_{k+1}-2S_k=0$，进而得证. 同学们来看看生 4 的过程（投影生 4 的规范过程，投影内容略），给个评价.

（众生仔细阅读分析后未找到问题，纷纷给好评）

师：生 4 这个过程也是我们学习的榜样. 同学们还有其他证明的方法吗？特别有没有哪个同学不用等比数列的求和公式就能证明出来的？

生 5：（主动起立）可以，算出公比 $q=-2$ 后，立得 $S_{k+2}+S_{k+1}-2S_k=a_{k+2}+a_{k+1}+a_{k+1}=a_{k+1}(q+2)=0$，从而得证（坐下，自豪状）.

（学生面面相觑，没明白）

师：生 5 的思路可能不少同学还没反应过来，老师是明白了，而且还刚好摘抄了一个同学具有相同想法的过程（展示投影 5，其实恰好是生 5 的），同学们来学习一下.

> 证：$S_{k+1}-S_k=a_{k+1}$　　$2a_3=a_5+a_4$
> $S_k-S_{k+2}=-a_{k+1}-a_{k+2}$　　$2a_1q^2=a_1q^4+a_1q^3$
> $a_{k+2}=-2a_{k+1}$　　$\because q\neq 1$，$\therefore q=-2$
> $\therefore S_{k+1}-S_k=S_k-S_{k+2}$　　S_{k+2}, S_k, S_{k+1} 成等差数列

投影 5　训练 2 过程 1

生众：看不懂，很混乱！

师：这个同学的证明过程似乎是从右到左，从上到下看就“好懂”了，实质是把分析过程作为证明过程了（生众：嗯……；生 5：低下头），是一个会而无分的过程. 其实稍微调整一下就是一个非常漂亮的证明过程. 请同学们看黑板.（边说边板演过程，具体略）

师：这下明白了吧！分析问题可以大步跳、大胆猜，甚至胡思乱想，但不能把分析思考的过程作为推理过程，因为这其中的“逻辑”只有你自己“知道”，不一定是规范的逻辑用语. 所以，我们不但要会思考分析问题，还要能把想法提炼成逻辑严密的推理过程（板书：逻辑）. 下面我们看训练 3，此题有一定的难度，但同学的方法基本都正确，遗憾的是表述上还是或多或少存在上面谈到的问题，这里不再多说. 老师也准备了一个同学的过程（展示投影 6），用这种方法的同学不多，其实就是将递推关系代入 $a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n$ 整理，用中项法证明. 同学们先验证一下，能不能得到 $a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=0$？

> $\forall n\geqslant 1, a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=\cdots$
> 整理得 $\frac{n-1}{2}a_{n+1}-\frac{n}{2}a_n=-\frac{1}{2}a_1$，
> 所以 $a_{n+1}=\frac{n}{n-1}a_n-\frac{a_1}{n-1}$，
> 所以 $a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=\cdots=0$，
> 所以 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$，
> 从而 $\{a_n\}$ 是等差数列.

投影 6　训练 3 过程 1

生 2：$a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=\frac{n+1}{n}a_{n+1}-\frac{a_1}{n}-2a_{n+1}+a_n=\frac{1-n}{n}a_{n+1}-\frac{a_1}{n}+a_n=\frac{1-n}{n}\left(\frac{n}{n-1}a_n-\frac{a_1}{n-1}\right)-\frac{a_1}{n}+a_n$

$=-a_n+\frac{a_1}{n}-\frac{a_1}{n}+a_n=0$，可以的！

师：对！用这方法的同学在老师的“…”部分算得也很精确到位，同学们再看看她的过程是不是很完美呢？

生 6：$n\geqslant 1$，特别是 $n=1$ 时，$n-1$ 不能做分母.

师：很好！这个看似“完美”的过程，其实其中也有问题. 那我们如何改进呢？

生 6：强调 $n\geqslant 2$，先完成 $a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=0$ 的证明，再在第二行的式子中取 $n=1$，即得 $a_3-2a_2+a_1=0$，从而完美解决问题.

师：说得好！当然我们大多数同学想法也很好，（在投影 6 上演算）就是把第二行的式子变成$(n-1)a_{n+1}-na_n=-a_1$，以$n+1$代n，得$na_{n+2}-(n+1)a_{n+1}=-a_1$，两式相减得$(n-1)a_{n+1}-na_n-na_{n+2}+(n+1)a_{n+1}=2na_{n+1}-na_n-na_{n+2}=0$，即得$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$对任意正整数$n$成立，故数列$\{a_n\}$为等差数列.

师：刚才我们用较长的时间讲评了本节的基础训练题.在这过程中除了学到了证明数列为等差（或等比）的两种方法外，请同学们想想，我们处理问题时还应做到什么？

生 7：注意解题的规范性（老师指"规范"二字），追踪好整个过程的下标n的范围（老师指"范围"二字）是否恰到好处地为我所用，落实到答卷上的过程在逻辑（老师指"逻辑"二字）上是否严谨清晰.

师：（竖大拇指）不错，下面来实践这些方法和注意点.

3.3　典例分析

师：请看例 1（投影），分析一下，找到方法，并按照生 7 所说写出(1)和(2)的过程.（老师投影展示学生的过程.生做题，师巡视）

例 1　已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_2=3$，$a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 证明数列$\{a_{n+1}-a_n\}$是等比数列；

(2) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(3) 若数列$\{b_n\}$满足$4^{b_1-1}\cdot4^{b_2-1}\cdot4^{b_3-1}\cdot\cdots\cdot4^{b_n-1}=(a_n+1)^{b_n}$，证明数列$\{b_n\}$是等差数列.

师：（投影生 8 的过程）大家来看生 8 写的，大家看看有没有问题？

生 8：(1) 由题意，得$a_{n+2}-a_{n+1}=(3a_{n+1}-2a_n)-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)$.又因为$a_2-a_1=3-1=2\neq0$，所以$a_{n+1}-a_n\neq0$，所以对任意$n$为正整数，均有$\dfrac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}=2\neq0$为常数.所以数列$\{a_{n+1}-a_n\}$是以 2 为公比、2 为首项的等比数列.

(2) 由(1)得$a_{n+1}-a_n=2\times2^{n-1}=2^n$，所以$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1=2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2^1+1=\dfrac{1\times(1-2^n)}{1-2}=2^n-1$.故所求数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=2^n-1$.

生：（认真阅读后）没有问题，非常规范！

师：生 8 做得非常棒.此题是 2006 年福建的高考题，本来题目中的递推关系比较复杂，我们没有系统研究过.但这不要紧，有了(1)的铺垫，(2)就很容易解决，我们考察问题一定要用好前题的结论或方法.当然(1)也可直接由递推关系直接构造（板书：构造）得$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)$，从而证明问题.在(2)中生 8 和大家一样，都是用累加法，这是一种通法，每个同学都要掌握.当然生 8 的过程中没有出现多个式子相加，而是把它们融合在一个式子中，这种简捷的写法值得推荐.老师想问：有没有谁没有用累加而把(2)解决的呢？比如得到$a_{n+1}-a_n=2^n$后，学习题(1)的手段，构造一个新数列来解决问题.

生众：……

师：$a_{n+1}-a_n=2^n$的左边是$a_{n+1}-a_n$，右边的2^n能不能写成类似的结构呢？

生 9：$2^n=2^{n+1}-2^n$.

师：然后呢？

生 9：（停顿）$a_{n+1}-a_n=2^{n+1}-2^n$，即$a_{n+1}-2^{n+1}=a_n-2^n$，所以$\{a_n-2^n\}$是常数数列，又$a_1-2^1=1-2=-1$，所以$a_n-2^n=-1$，即$a_n=2^n-1$.

师：太好了，构造了一个常数数列！下面我们回头看训练 3（再次展示投影 6），我们能否由$(n-1)a_{n+1}-na_n=-a_1$求出a_n，再说明数列$\{a_n\}$是等差数列呢？

生 10：对$n\geqslant2$，式子两边同除以$(n-1)n$得，$\dfrac{a_{n+1}}{n}-\dfrac{a_n}{n-1}=\dfrac{-a_1}{n(n-1)}=-a_1\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}\right)$，即$\dfrac{a_{n+1}}{n}-\dfrac{a_1}{n}=\dfrac{a_n}{n-1}-\dfrac{a_1}{n-1}$，从而数列$\left\{\dfrac{a_{n+1}}{n}-\dfrac{a_1}{n}\right\}$为常数数列，若记常数为$d$，则立得$a_{n+1}=a_1+nd$，接下来用定义法可证$\{a_n\}$是等差数列.

师：很好！这种合理构造等差数列、等比数列，甚至常数数列的解题意识要逐渐建立.下面，回到例 1(3)，关键是$4^{b_1-1}\cdot4^{b_2-1}\cdot4^{b_3-1}\cdot\cdots\cdot4^{b_n-1}=(a_n+1)^{b_n}$，带来什么？我们只要把$\{a_n\}$的通项代入，即得$4^{(b_1-1)+(b_2-1)+(b_3-1)+\cdots+(b_n-1)}=(2^n)^{b_n}$，从而问题转化为已知$2(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n-n)=nb_n$，求证$\{b_n\}$是等差数列.下面请同学们继续.

生 11：和训练 3 是一样的，只要以$n+1$代式子中的n，再将所得式子与原式子作差整理即得$(n-1)b_{n+1}-nb_n=-2$，然后再复制作差构造中项关系用中项法或构造常数数列用定义法均可求证.

师：前面处理过$(n-1)a_{n+1}-na_n=a_1$关系，现问题转化到$(n-1)b_{n+1}-nb_n=-2$，其实作为对此题的分析已经结束了，剩下的就是把前题的实现过程中的a_n换成b_n再现一下.能否把问题转化成熟悉的或类似的问题求解，这也是著名的波利亚数学解题表的核心内容之一.其实，若设$\{b_n\}$的前n项和为S_n，则有$2(S_n-n)=nb_n$，即$S_n=\dfrac{n(2+b_n)}{2}$.设$n=1$易得$b_1=2$，从而原问题相当于已知$S_n=\dfrac{n(b_1+b_n)}{2}$，求

证$\{b_n\}$为等差数列.这个你会吗?

生众:会,就是训练 3.但这样转化不是回头了吗?

师:好像是回头了,但问题被解决了.匈牙利数学家路沙·彼得在《无穷的玩艺 —— 数学的探索与旅行》一书中有这样一个故事,记者问数学家:“房子里有一个能出水的水龙头、一个完好的空茶壶和一台能正常使用的煤气灶具,现要一壶开水,你怎么做?”数学家:“拿起茶壶,打开水龙头将茶壶装满水,再将装满水的茶壶放到煤气灶上,打火等茶壶水烧开即完成.”记者:“现有第二个问题,房子里有一个能出水的水龙头、一个完好的茶壶装满水放在一台能正常使用的煤气灶具上,现要一壶开水,你怎么做?”同学们先来回答吧!

生众:把煤气打着,烧开即完成!

师:你们都比数学家能力强! 可数学家的答案和你们不一样,他的答案:“把茶壶拿下并把水倒掉,转化为上一问题.”(众生大笑) 同学们不要笑,这或许是个真实的故事,正是数学家的思维.路沙·彼得对此故事作了这样的点评:“解题时,往往不对问题进行正面的攻击,而是不断地将它变形,直至把它转化为已经能够解决的问题.[1]”(板书:转化) 下面看例 2,请思考,如何思考、转化、求解?(投影例 2,众生思考分析,教师巡视)

例 2 设$\{a_n\}$是首项为a,公差为d的等差数列$(d\neq 0)$,S_n是其前n项和.记$b_n=\dfrac{nS_n}{n^2+c}$,$n\in\mathbf{N}^*$,其中c为实数.

(1) 若$c=0$,且b_1,b_2,b_4成等比数列,证明$S_{nk}=n^2S_k(k,n\in\mathbf{N}^*)$;

(2) 若$\{b_n\}$是等差数列,证明$c=0$.

师:生 12,说说你对(1) 是怎么思考的?

生 12:由S_n是等差数列$\{a_n\}$的前n项和,而$c=0$时,即有$b_n=\dfrac{S_n}{n}$知$\{b_n\}$为等差数列,想到这些我就直接做了.代入后得$b_1=a$,$b_2=a+\dfrac{d}{2}$,$b_4=a+\dfrac{3d}{2}$,再由b_1,b_2,b_4成等比数列进一步可求得$d=2a$,所以$S_n=n^2a$,然后代入就得证了.

师:生 12 说得很好,老师不再多说,现老师把教育考试院公布的答案投影给大家学习一下(投影略),感受一下权威证题过程的严密性.我们看到必要的文字说明、细节(如$d\neq 0$) 的交代等,这往往是同学的解题过程中所欠缺的.下面思考(2),请想好的同学主动谈谈解题思路.

生 13:用特殊值法.由b_1,b_2,b_3成等差数列先算出c的值,然后检验.

生 14:用比较系数法.设$b_n=An+B$,代入关系式得到一个关于n的多项式,然后由n取正整数的任意性知,此多项式的各项系数均为零,即可求出c的值.

师:还有其他想法吗?(停顿) 目前没有了,那就先对两位同学提出的方法讨论一下.这是 2013 年的江苏高考第 19 题.对题(2),特殊值法和比较系数法(板书:特殊值法、比较系数法) 是卷面上出现最多的两种方法.我们先看生 13 的特殊值法,由b_1,b_2,b_3成等差数列计算后得到$(2a+5d)c^2-(22a-5d)c=0$.生 13 请回答,以后怎么做?

生 13:由方程可得$c_1=0$,$c_2=\dfrac{22a-5d}{2a+5d}$.然后检验$c=0$时满足,$c=\dfrac{22a-5d}{2a+5d}$时不满足就行了.

生 15:老师,这太麻烦了,式子可整理成$(2c^2-22)a+(5c^2+5c)d=0$.从而有$2c^2-22c=0$且$5c^2+5c=0$,联立解得$c=0$.

生 14:支持,而且$2a+5d$说不定还为零呢?

生 13:不能那样做,这里的a和d分别是首项和公差,是常数,我的是对的,不过$2a+5d=0$我是忽略了.(众生安静,望着老师)

师:(笑) 大家都再冷静思考一下吧!

生 15:生 13 对,a和d是常数,没有任意性.我错了 ……

师:其实当年高考中,此题有好多同学就是因用这种“方法”得零分.解题中分清变数和常数很重要.但$2a+5d=0$怎么办? 如何说明$c=\dfrac{22a-5d}{2a+5d}$时不满足?

生 16:$2a+5d=0$时,由$d\neq 0$知$22a-5d\neq 0$,故此时必有$c=0$.

生 17:$c=\dfrac{22a-5d}{2a+5d}$时,只要验证一下b_2,b_3,b_4不构成等差数列就行了.

生 18:再由b_2,b_3,b_4构成等差数列求出c的值,取公共解.

师:大家说的都正确.告诉大家,若由b_2,b_3,b_4构成等差数列可求出$c=0$或$c=\dfrac{26a-d}{a+4d}$,后面我们怎么做呢? 生 18 你接着说.

生 18:说明$\dfrac{22a-5d}{2a+5d}$与$\dfrac{26a-d}{a+4d}$必不相等就行了,具体可以假设它们相等,找矛盾.

师:即用反证法.其实它们两个若相等,我们可整理得$2a^2+3ad+d^2=0$,进而得$2a=-d$或$a=-d$,对应c的值为-9或-4,这显然是矛盾的.从而

必有 $c=0$. 到此同学们再想想，是不是结束了呢？

生：还要验证 $c=0$ 时，$\{b_n\}$ 是等差数列.

师：真的要验证吗？（停顿）其实不需要了，我们已经证得 $c=0$ 了. 若问题改为“若 $\{b_n\}$ 是等差数列，求 c 的值”的求值问题，在用特殊值法求得 $c=0$ 后，还必须验证 $c=0$ 时，$\{b_n\}$ 是等差数列，这是因为“$c=0$”仅仅是“$\{b_n\}$ 为等差数列”的必要条件. 我们必须仔细体会证明、求值、探索等不同类型问题在表述上的异同，做到恰到好处，避免多余，绝不答非所问. 由于时间关系，生 14 的比较系数法我们不去讨论了，我们仅来学习一下考试院公布的参考答案（投影参考答案，略）.

师：解答中，在得到 $(d_1-\frac{d}{2})n^3+(b_1-d_1-a+\frac{1}{2}d)n^2+cd_1n=c(d_1-b_1)$ 后，其实还是用特殊值法，取 $n=1,2,3,4$ 得到方程组，结合 $d\neq 0$ 求得 $c=0$ 而得证的，其实这和特殊值法必须考虑到 b_4 才能具体确定 $c=0$ 从理论上讲是一致的. 另外，要看到，过程得到 $c=0$ 后就结束了，不需验证. 当然，这个过程其实不是生 14 想说的比较系数法，她的比较系数法是在得到关于 n 的三次恒等式后，抓住 $n\in\mathbf{N}^*$ 的任意性，得到关于 n 的三次多项式的各项系数及常数项均为零，可以更快地解决问题，是不是？

生 14：是.

师：关于生 13 的特殊值法的具体证题过程，请同学们课后完成.

3.4 回顾小结、课后作业（略）

4 教学感悟

“以学定教”是新课程倡导的三大核心理念之一，建构主义等学习理论也认为：学生有不同于成人的数学世界. 数学知识不是简单机械地从一个人迁移到另一个人，而是基于个人经验的操作、交流，通过反省来主动建构的[2]. 对高三数学复习课（特别是第二轮复习）来说，学生的知识体系、学习水平和思维能力已具备一定的基础，教师在复习时更应该站在学生的立场上去教，即不只是让学生去模仿和接受老师的策略和思维模式，更要启发学生用自己现有的知识去过滤和解释新信息，并同化它，形成完善和优化的认知结构. 因此，教师在设计高三专题复习课时，应充分考虑学生的思维模式和认知特点. 帮助学生通过自己的活动对已有的数学知识构建起自己的正确理解，使课堂教学成为学生亲自参与的充满丰富生动的数学思维活动的场所，从而最大限度地提高高三数学复习课的有效性. 为实现这一指导思想，除了把握好我们耳熟能详的原则和策略，还有两个教师容易忽略的问题值得我们高度重视.

4.1 以学定教，学生基本能力的薄弱环节在哪里？

2014 年江苏省高考考试说明上强调：“重视数学基本能力和综合能力的考查.”其中数学基本能力主要包括空间想象、抽象概括、推理论证、运算求解、数据处理这几个方面的能力. 证明类问题则更多的是侧重于考查推理论证能力，这类题型以往更多的在立体几何中考查，学生也习惯于论证空间中的垂直或平行关系，而对于本节研究的数列中的代数推理问题相对较少，学生表现出的不是不会做，而是推理过程表述明显不严密，甚至因果倒置，逻辑混乱，达不到高考对推理论证能力的考查要求. 此问题在 2013 年江苏阅卷中表现非常突出，不少考生就是因为不能规范表达导致失分严重，数学成绩与预估相差甚远. 到高三二轮复习阶段，一方面，提高综合能力很重要，另一方面规范表达更重要. 本课在点评课前训练时，收集学生中的不规范表述，让学生自己查找并纠正，在培养严密逻辑思维能力的同时，也以身边实例教育学生要注重解题过程的规范性，尽量在高考中做到会而对. 出于这个目的，结合学生在课后作业中的表现，本课花较长时间作预习点评，个人感觉是值得的、成功的.

4.2 以学定教，学生思维的常见路径和障碍在哪里？

数学解题重在转化. 课上说到的路沙 · 彼得的话，对数学家解决数学问题的思维过程作了精辟、生动的描述. G · 波利亚在《怎样解题》一书中回答了一个问题，即“一个好的想法是如何想出来的？”他说：“教师对学生应当设身处地，应当了解学生情况，应当弄清学生正在想什么，并且提出一个学生自己可能会产生的问题，或者指出一个学生自己可能会想出来的步骤.”[3] 也正是基于此目的，本课的教学设计，从学生的作业中的问题出发强调严密性，从学生已知出发逆向考察再生问题，从学生的思维起点出发步步深入. 不过，在课上诱导出的构造常数数列求解数列通项的方法[4]，感觉对学生有挑战性，在接下来的教学中还需继续渗透.

参考文献

[1] 路沙 · 彼得. 无穷的玩艺[M]. 朱梧槚，袁相碗，郑毓信译. 辽宁：大连理工大学出版社，2008：103-107.

[2] 陈平. 建构主义观点下的教学设计[J]. 数学通讯，2000(1).

[3] G · 波利亚. 怎样解题[M]. 涂泓，冯承天译. 上海：上海科技教育出版社，2002：1-5.

[4] 蔡玉书. 求一类数列通项的最简方法[J]. 数学通讯，2011(11-12).

以学定教提高高三复习的有效性--“数列中的证明问题”教学实录与反思

作者： 丁宗国
作者单位： 江苏省苏州实验中学 215011
刊名： 中学数学月刊
英文刊名： The Monthly Journal of High School Mathematics
年，卷(期)： 2014(6)